

ФУНКЦИЯ ҰҒЫМЫ. ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕГІ ШЕГІНІҢ КОШИ ЖӘНЕ ГЕЙНЕ БОЙЫНША АНЫҚТАМАСЫ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

30 қыркүйек 2024
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – Функцияның үзіліссіздігінің Коши және Гейне бойынша анықтамаларын үйрену

Негізгі сұрақтар:

- 1 Функцияның нүктедегі шегінің Коши бойынша анықтамасы
- 2 Функцияның нүктедегі шегінің Гейне бойынша анықтамасы



Функцияның шегінің анықтамасы

$\mathbb{R}^n$ кеңістіктегі M_0 нүктесінің аймағында, M_0 нүктесінде де $y = f(M)$ функциясы анықталған болсын.

Анықтама 1 ($\varepsilon - \delta$ тілінде)

Сан A $y = f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі шегі деп аталады ($M \rightarrow M_0$ үшін), егер

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(M) - A| < \varepsilon \quad \forall M : \rho(M, M_0) < \delta, M \neq M_0.$$

Мысал 1 Дәлелде:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Бұл $x = 3$ нүктесінде анықталмаған бір айнымалы функция. $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \varepsilon/2$ таңдап, теңсіздікті тексеруге болады.

Анықтама 2 (тізбектер тілінде) Сан A $y = f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі шегі деп аталады, егер кез келген $\{M_n\} \rightarrow M_0$, $M_n \neq M_0$ үшін, $\{f(M_n)\} \rightarrow A$.



Шектердің қасиеттері

- 1 Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$, және $f(x) \leq \varphi(x)$, $x \neq a$, онда $A \leq B$.
- 2 Егер $f(x) \leq \psi(x) \leq f(x)$, $x \neq a$, онда $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A$.
- 3 Тұрақтының шегі осы тұрақтының өзіне тең.
- 4 Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ және $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ ақырлы болса, онда:

- 1 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$,
- 2 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$,
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, C тұрақты.

Шексіз кіші және шексіз үлкен шамалар Анықтама Функция $\alpha(x)$ $x \rightarrow a$ кезінде шексіз кіші деп аталады, егер

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0,$$

ал $\beta(x)$ шексіз үлкен болса,

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty.$$



Теоремалар

- 1 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x), \forall x \in u(a).$
- 2 Егер $f(x)$ шектелген және $\lim \beta(x) = \infty, f(x) > M > 0$, онда $\lim \varphi(x) = 0$.
- 3 Егер $f(x)$ шектелген болса, онда $\lim[f(x) \cdot \alpha(x)] = 0$.
- 4 Егер $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)/\beta(x) = C \neq 0$, онда α және β бір ретті шексіз кіші, егер $C = 1$, онда $\alpha \sim \beta$.

Анықталмағандықтар

Негізгі анықталмағандықтар:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Үзіліссіз функциялар

Анықтама

Функция $f(M)$ M_0 нүктесінде үзіліссіз, егер:

- 1 $f(M_0)$ анықталған,
- 2 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ шегі бар,
- 3 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$



Анықтама 10 (өсімшесі арқылы)

Функция $y = f(x)$ x_0 нүктесінде үзіліссіз, егер

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0.$$

Мысалдар

- $y = x^2$ барлық $x \in \mathbb{R}$ үшін үзіліссіз.
- $y = \sin 5x$ барлық $x \in \mathbb{R}$ үшін үзіліссіз.

Үзіліс нүктелері

- Жөнделетін үзіліс: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ бар, бірақ $f(x_0)$ анықталмаған немесе $\lim \neq f(x_0)$.
- Бірінші түрдегі үзіліс: $f(x_0 - 0)$ және $f(x_0 + 0)$ табылған, бірақ олар тең емес.
- Екінші түрдегі үзіліс: $f(x)$ шегі жоқ немесе шексіздікке ұмтылады.

Үзіліссіз функциялардың қасиеттері

- 1 $f(x)$ және $\varphi(x)$ үзіліссіз болса, онда $f \pm \varphi$, $f \cdot \varphi$ үзіліссіз.
- 2 $f(x)$ үзіліссіз, $\varphi(t)$ үзіліссіз, онда $f(\varphi(t))$ үзіліссіз.



Кесіндідегі үзіліссіз функциялар

Definition

$f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз, егер (a, b) аралығындағы барлық нүктелерде үзіліссіз және

$$f(a+0) = f(a), \quad f(b-0) = f(b).$$

Теоремалар

- 1 Егер $f \in C[a, b]$, онда f шектелген.
- 2 f $[a, b]$ кесіндісінде максимум M және минимум m мәндерін қабылдайды:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Функция шегі. Біржақты шектер

Айталық, $f(x)$ функциясы X сан жиынында анықталсын.



Definition (Шектік нүкте)

Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында X жиынының x_0 өзгеше x нүктесі жатса, x_0 нүктесін X жиының *шектік нүктесі* деп атайды. Шектік нүкте X жиынында жатуы да, жатпауы да мүмкін.

X жиынынан x_0 -ке жинақты

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \neq x_0) \quad (1)$$

тізбегін аламыз, сәйкес функция мәндері

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \quad (2)$$

сан тізбегін құрады.



Definition (Гейне бойынша шек)

x_0 нүктесіне жинақты (1) тізбек бойынша құрылған (2) тізбек b санына жинақты болса, онда b санын $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі немесе $x \rightarrow x_0$ шегі деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \quad \text{немесе} \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow b.$$

$f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде жалғыз шегі бар, бұл $\{f(x_n)\}$ жинақты тізбектің жалғыз шегі болатынан шығады.



Definition (Коши бойынша шек)

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, кез келген $x \in X, x \neq x_0$ мәндерінде

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \quad (3)$$

теңсіздігі орындалса, b санын $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі шегі деп атайды. Бұл анықтаманы функция шегінің “ ε - δ ” тіліндегі анықтамасы деп атайды.

Theorem

Функция шегінің бірінші және екінші анықтамасы эквивалентті.



Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] жұмыстардан қарауға болады.



Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т.

Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 1-том. – 562 б.



Жәутіков О.А.

Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 832 б.



Темірғалиев Н.Т.

Математикалық анализ. – Алматы: Мектеп, 1987. – 1-том. – 288 б.



Темірғалиев Н.Т.

Математикалық анализ. – Алматы: Ана тілі, 1991. – 2-том. – 400 б.



Ильин В.А., Позняк Э.Г.

Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 1. – 616 с.



Ильин В.А., Позняк Э.Г.

Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 2. – 448 с.



Зорич В.А.

Математический анализ. – М.: МЦНМО, 2012. – Т. 1. – 702 с.





Кудрявцев Л.Д.

Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1981. – Том 1. – 687 с.



Фихтенгольц Г.М.

Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 1. – 680 с.



Фихтенгольц Г.М.

Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 2. – 802 с.



Демидович Б.П.

Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.



Берман Г.Н.

Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с.



Кудрявцев Л.Д.

Краткий курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2005. – Том 1. – 400 с.



Сатығұлова С., Исакова А.Қ., Айтжанов С.Е.

Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. – 236 б.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

